LE PROBLEME DE LA CHASSE D’EAU

Avertissement : Bien que ce problème n’ait rien à voir avec l’électronique, nous allons voir comment un système simple peut se modéliser avec des équations différentielles et comment on peut résoudre ce problème par la transformée de Laplace.

I. Position du problème

Considérons une chasse d’eau constituée d’un réservoir et alimentée par un robinet commandé par un flotteur. Quand le réservoir est vide, le robinet est grand ouvert, le débit est maximum. Au fur et à mesure que le réservoir se remplit, le flotteur monte, le robinet se ferme de plus en plus et le débit diminue progressivement jusqu'à l’arrêt complet.
Nous allons déterminer l’expression du niveau de l’eau en fonction du temps lorsque le réservoir se remplit.

II. Caractéristiques du système étudié

On supposera que le réservoir à la forme d’un parallélépipède rectangle.

Dimensions du réservoir : longueur =10 cm
largeur = 30 cm
hauteur maximale d’eau = 30 cm

Débit maximum du robinet = 0.5 l/s

III. Mise en équation du système

III.1 Expression du volume d’eau en fonction de la hauteur d’eau

Q.1) Donner l’expression du volume d’eau dans le réservoir en fonction des dimensions de la cuve et de la hauteur d’eau dans le réservoir. A.N : Donner V(litres) en fonction de h(m). Calculer le volume maximum.

III.2 Expression du débit en fonction de la hauteur d’eau

On suppose que la relation qui lie le débit à la hauteur d’eau est linéaire :
Pour h =0 le débit D est maximum = Dmax
Pour h = hmax le débit D est nul

Q.2) Donner l’expression de D en fonction de h. A.N Donner D(l/s) en fonction de h(m)

III.3 Relation entre volume et débit

Q.3) Donner la relation intégrale ou différentielle reliant V et D.
Q.4) En déduire l’équation différentielle sur h(t).

IV. Résolution de l'équation différentielle

Q.5) Résoudre l'équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace.
On posera H(p) = transformée de Laplace de h(t)

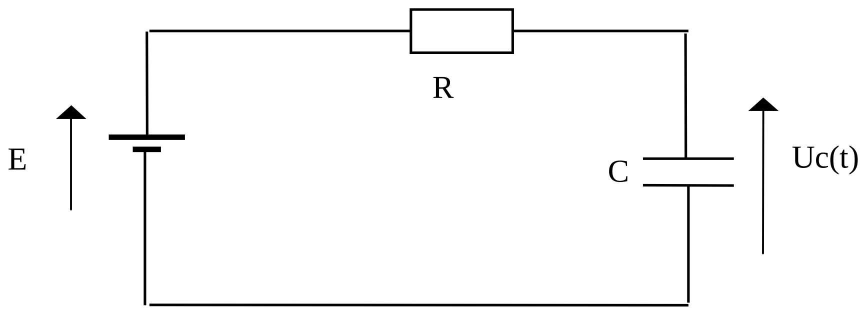
Q.6) Calculer la constante de temps du système.

Q.7) Donner l'allure de h(t).Le réservoir est supposé vide à t = 0

V. Analogie électrique

L'expression obtenu pour h(t) est identique à celle obtenue pour la différence de potentiel au borne d'un condensateur qui se charge.

Rappel d'électricité :



Si le condensateur est déchargé à t = 0, $Uc(t) = E(1-e^{-t/(RC)})$

Q.8) Par analogie, identifier :

Uc(t) : d.d.p aux bornes du condensateur
I(t) : intensité du courant
Q(t) : quantité d'électricité stockée dans le condensateur
E : Force électromotrice
τ = RC : constante de temps du circuit
R : résistance du circuit
C : capacité du condensateur

VI. Conclusion

Q.9) Discuter les hypothèses prises au début du problème.

Q.10) Que se passe-t-il si le robinet fonctionne en tout ou rien débit max ou débit nul).?

Q.11) Conclure.